（令和３年度　学士課程）

総合型選抜
（工学院）

総合問題（筆記）

１２０分

注意事項

１．試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。

２．本問題冊子は４ページ（表紙等を含まない），答案用紙は７ページである。

３．各答案用紙の所定の欄に受験番号を必ず記入すること。

４．すべての問題に解答すること。

５．解答はすべて各答案用紙の所定欄に記入すること。裏面は使用しないこと。

６．答案用紙の冊子は切りはなさないこと。

問題1

取りうる事象が2種類である試行を独立に n 回行ったときに，一方の事象が何回起こるかの確率分布を二項分布という。二項分布に従う典型的な確率変数としては，コイン投げによって表(もしくは裏)が出る回数が挙げられる。

このように，我々の生活の中には様々な確率分布が存在する。ただ，残念ながら確率がわかっているという状況は現実では極めて稀なケースであり，現実には確率がわかっておらず，データから分布を推定しなければならないケースがある。

いま，形が歪んでおり，表が出る確率がわからないコインを考える。そのわからない確率を θ とおく (ただし $0 < \theta < 1$)。コインを投げる回数を n，表が出る回数を k とする。このとき「このコインを使用する」という前提のもとで表が k 回 出る条件付き確率は

$$\begin{aligned} P(k|\,\text{表が出る確率} = \theta) &= {}_nC_k\theta^k(1-\theta)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!}\theta^k(1-\theta)^{n-k} \end{aligned}$$

で表される。ここで，$0! = 1$, ${}_nC_0 = 1$ とする。さて，いま θ の値がわからないので，限られた回数だけコインを実際に投げて得たデータから確率 θ を推定したい。以下の問に答えよ。ただし，各問ごとにコインの歪み具合は異なるとする。

問1 確率 θ の値を推定する方法の一つに，尤度（ゆうど）関数と呼ばれる概念を使った最尤推定法という方法がある。まず，尤度関数とは，上記の条件付き確率 P を θ の関数とみなし，n や k には実際に投げて得たデータの値を代入して評価したものである。いま，ある歪んだコインを3回投げて3回とも表が出た。このときの尤度関数を $L(\theta)$ とおくとき，$L(\theta)$ を求めよ。

問2 最尤推定法とは，尤度関数が最大値をとるような θ をその推定値とするような推定法である。ある歪んだコインを5回投げたところ，表が出た回数について以下の表のような結果を得た。

表/裏 (コイン1)	表	裏
回数	4	1

このとき，尤度関数を求めたうえで，上で説明した最尤推定法に従って θ の推定値 $\widehat{\theta}$ を求めよ。

問3 一般的に，n 回コインを投げたときに k 回表が出たとする。このとき，最尤推定法を用いて得た θ の推定値 $\widehat{\theta}$ は k/n となることを証明せよ。

次の問4以降は，歪み方の異なる2つのコイン (コイン1とコイン2) を考える。それぞれ表の出る確率が θ_1, θ_2 であるが，前問と同様にそれらの値はわからないとする。Aさんがコ

イン1については20回，コイン2については50回投げたところ，表が出た回数について以下の表のような結果を得た。

表/裏 (コイン1)	表	裏
回数	11	9

表/裏 (コイン2)	表	裏
回数	24	26

次に，別のBさんがAさんから1, 2いずれかのコインを1つ受け取ったが，見た目が同じなためにどちらのコインを受け取ったかはわからず，したがって当初Bさんは「1/2の確率でコイン1，1/2の確率でコイン2」だと考えたとする。また，Bさんは，Aさんがそれぞれのコインを投げて得た上記の結果は知っているとする。

その後，Bさんが自らそのコインを10回投げたところ，出た回数について以下の表のような結果を得た。

表/裏 (コイン 1 or 2)	表	裏
回数	5	5

さて，この結果から，Bさんは受け取ったコインが1か2かをどのように判断するべきだろうか。以下ではこれを考察しよう。

問4 一般的に，X が起こる確率を $P(X)$，Y が起こる確率を $P(Y)$，そして X と Y が同時に起こる確率を $P(X,Y)$ とするとき，「X が実現した，という条件の下で Y が実現する確率」は

$$P(Y|X) = \frac{P(X,Y)}{P(X)}$$

で与えられ，これを Y の X に関する条件付き確率という。$P(Y|X)$ は以下のようにも表現できることを示せ。

$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)}$$

これをベイズの定理という。

問5 Bさんが得た結果「表が5，裏が5」を条件としたときの，Bさんが受けとったコインが1である条件付き確率と2である条件付き確率を比較したとき，もし前者が大きければBさんが受け取ったのはコイン1，後者が大きければコイン2と判断するとしよう。この場合，Bさんのコインは1, 2のどちらと判断するのが妥当か，根拠も含めて答えよ。

問題２

図 2-1 のように，質量の無視できるばね定数k_1のばねの一端を底面に固定し，他端に質量m_1のおもりを取り付ける。釣り合いの位置Oを基準としてばねを押し下げ，静かに離すとおもりは上下方向のみに運動を始めた。おもりの位置は上向きを正とする。次の問いに答えよ。

問１　おもりm_1が釣り合いの位置からx_1にあるとき，加速度をa_1として運動方程式を示せ。

問２　x_1の時間変化が$x_1(t) = A_1 \sin \omega t$と与えられるとき，加速度$a_1$は$x_1(t)$を時間$t$で2 階微分することで得られる。加速度$a_1(t)\left(= x_1''(t)\right)$を時間の関数として表せ。ただし$A_1$および$\omega$は定数とする。

問３　$x_1(t)$，$a_1(t)$を運動方程式に代入すると次式が成り立つ。

$$\boxed{\text{（ア）}}\, A_1 \sin \omega t = 0$$

$\boxed{\text{（ア）}}$ にあてはまる数式を求めよ。

問４　任意の時間tで上式が成り立つことから，ωが求められる。ωをm_1，k_1を用いて表せ。

図 2-2 のように，さらにm_1の上部に質量の無視できるばね定数k_2のばねの一端を固定し，他端に質量m_2のおもりを取り付ける。２つのおもりは上下方向にのみ運動し，その位置は上向きを正とする。ここでm_1に$F_0 \sin \Omega t$なる周期的な力が加わっている場合を考えよう。ただしF_0とΩは定数とする。このときm_2，k_2を適切に設定すれば，m_1の位置が変化しないように振動を抑制できる。このことを示そう。（これは動吸振器と呼ばれ，高層ビルの振動抑制にも使われる装置である。）

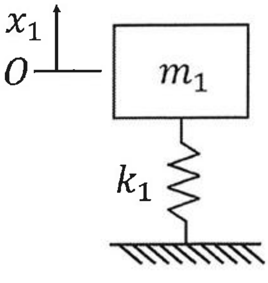

図 2-1

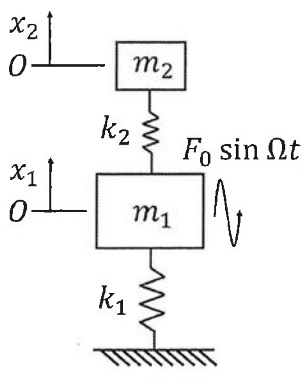

図 2-2

問５　m_1，m_2が釣り合いの位置から各々x_1，x_2だけ変位するとき，m_2の加速度をa_2としてm_2についての運動方程式を示せ。

問６　m_1の加速度をa_1としてm_1についての運動方程式を示せ。

問７　変位を時間の関数として次のように表すことにする。

$$x_1(t) = A_1 \sin \Omega t$$
$$x_2(t) = A_2 \sin \Omega t$$

これらを**問５**，**問６**で求めた運動方程式に代入すると，次式のように変形できる。

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = F_0$$
$$\gamma A_1 + \delta A_2 = 0$$
$$\therefore \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$を，$m_1, m_2, k_1, k_2, \Omega$を用いて表せ。

問８　A_1およびA_2を，$m_1, m_2, k_1, k_2, \Omega, F_0$を用いて表せ。

問９　m_1の振動を抑制するには，どのようにm_2，k_2を設定するのが良いか，数式を用いて説明せよ。